ردیف		نمره

۱ — درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید. (نمره: ۱)

الف) دامنهٔ مشتق تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x & x\geq ۱ \\ x^۲-۱ & x<۱ \end{cases}$ مجموعهٔ $R-\{۱\}$ است.

ب) اگر تابعی صعودی باشد، آهنگ تغییر متوسط آن همواره صعودی است.

پ) اگر $f'(c)=۰$، آن‌گاه نقطهٔ $(c,f(c))$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی برای تابع f است.

ت) اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، در این صورت f در این بازه ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق دارد.

۲ — جاهای خالی را با کلمه یا عدد مناسب پر کنید. (نمره: ۲)

الف) مشتق دوم تابع $f(x)=\frac{۲}{x}$ در $x=۲$ برابر .... است.

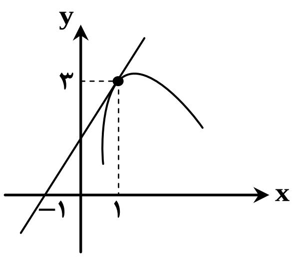
ب) اگر $f(۱)=g(۱)=۴$، $f'(۱)=۵$ و $g'(۱)=-۲$، آن‌گاه $(f\cdot g)'(۱)$ برابر .... است.

پ) تعداد نقاط بحرانی تابع $f(x)=x^۳+x$ در بازهٔ $(-۱,۲]$ برابر .... نقطه است.

ت) عرض اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^۴+۴x$ برابر .... است.

۳ — گزینهٔ درست را انتخاب کنید. (نمره: ۱/۵)

الف) با توجه به شکل مقابل حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-۳}{۲x-۲}$ کدام است؟



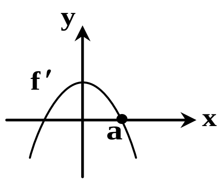
۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$

۳) ۳ ۴) $\frac{۱}{۲}$

ب) اگر $f(x)=x^۳-x$ و $g(x)=\sqrt{x}$، حاصل $(fog)'(۴)$ کدام است؟

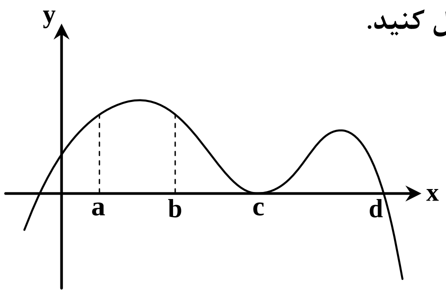
۱) $\frac{۱۱}{۴}$ ۲) $\frac{۲۵}{۴}$ ۳) $\frac{۳۳}{۴}$ ۴) $\frac{۴۷}{۴}$

پ) شکل مقابل نمودار مشتق تابع چندجمله‌ای f است. $x=a$ طول کدام‌یک از نقاط زیر است؟



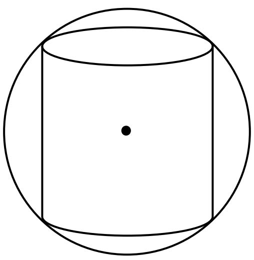
۱) نقطهٔ گوشه‌ای
۲) مماس قائم
۳) ماکزیمم نسبی
۴) مینیمم نسبی

۴ — شکل مقابل نمودار تابع f است. با توجه به طول‌های مشخص‌شده، جدول زیر را کامل کنید. (نمره: ۱)



$f'(x)$	-۵	صفر	۲	-۱
x				

۵ — مشتق‌پذیری تابع $f(x)=\left|x^۲-۲x\right|$ را در $x=۲$ بررسی کنید. (از تعریف مشتق استفاده کنید.) (نمره: ۱/۲۵)

ردیف		نمره
۶	نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x} & -1<x<1\\ \lvert x-2\rvert & x>1\end{cases}$ را رسم کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید. الف) تابع f روی دامنه‌اش در چند نقطه مشتق‌ناپذیر است؟ ب) طول نقطه (یا نقاط) گوشه‌ای تابع f را مشخص کنید. پ) آیا تابع f روی بازهٔ $(-1,1)$ مشتق‌پذیر است؟ چرا؟	۱/۵
۷	مشتق توابع زیر را به‌دست آورید. (نیازی به ساده‌کردن نیست.) الف) $f(x)=(2x^3+x)^5(\sqrt{5x-4})$ ب) $g(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x^2-1}}{x^4-8x+1}$	۲
۸	تابع $g(x)=x^2\cdot f(x^3-4x)$ مفروض است. اگر $2f(0)=3f'(0)=6$، مقدار $g'(2)$ را به‌دست آورید.	۱
۹	یک تودهٔ باکتری پس از t ساعت دارای جرم $f(t)=\sqrt{8t}+t^3$ است. الف) آهنگ تغییر متوسط جرم این توده را در بازهٔ زمانی $[0,2]$ به‌دست آورید. ب) آهنگ تغییر لحظه‌ای جرم این توده را در لحظهٔ $t=\frac{1}{2}$ به‌دست آورید.	۱
۱۰	با تشکیل جدول تغییرات تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+5}$: الف) بزرگ‌ترین بازه‌ای از R که تابع در آن اکیداً صعودی است را مشخص کنید. ب) مقدار ماکزیمم نسبی تابع را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۱	اگر ماکزیمم مطلق تابع $f(x)=x^3+3x^2+k$ در بازهٔ $[-1,2]$، پنج برابر مینیمم مطلق آن باشد، مقدار k را به‌دست آورید.	۱/۲۵
۱۲	نقطهٔ $A(1,2)$ اکسترمم نسبی تابع $f(x)=ax^4+bx^2+1$ است. مقادیر a و b را به‌دست آورید.	۱
۱۳	طول نقاط بحرانی تابع $f(x)=x\sqrt{8-x^2}$ را به‌دست آورید.	۱/۵
۱۴	مساحت مستطیلی برابر $36\,cm^2$ است. کمترین مقدار ممکن برای محیط این مستطیل را به‌دست آورید.	۱
۱۵	مطابق شکل، استوانه‌ای به ارتفاع $2h$ و شعاع قاعدهٔ r درون کره‌ای به شعاع $\sqrt{12}$ قرار دارد. الف) حجم این استوانه را به‌صورت تابعی از ارتفاع آن بنویسید. ب) با توجه به قسمت «الف» و رسم جدول تغییرات، مقدار h را طوری به‌دست آورید که حجم استوانه بیشترین مقدار ممکن باشد. 	۱/۵

موفق باشید

گزینه دو
مؤسسه آموزشی فرهنگی

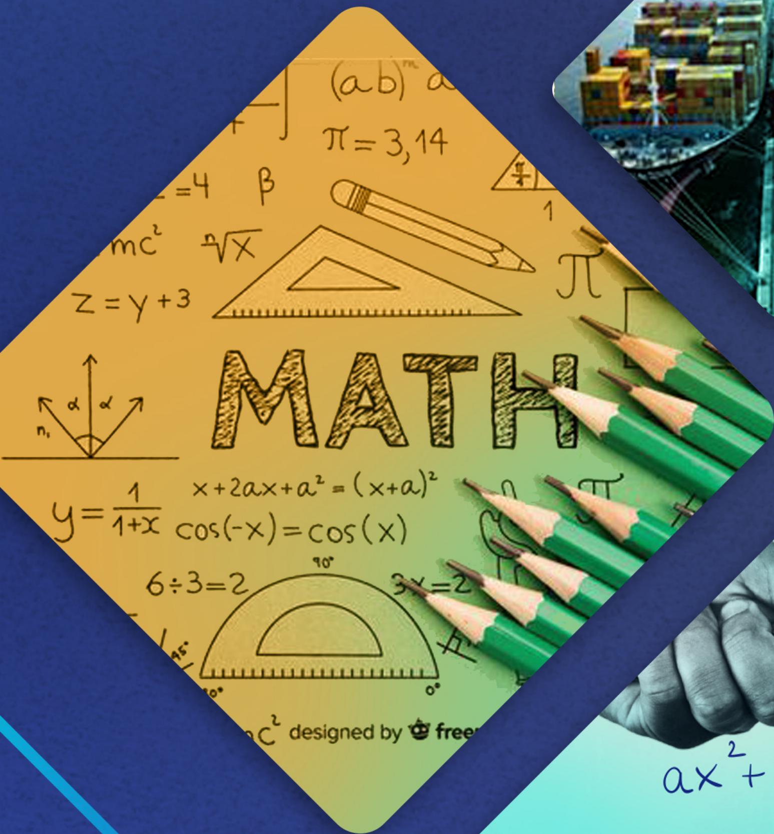
ویژهٔ پایهٔ دوازدهم

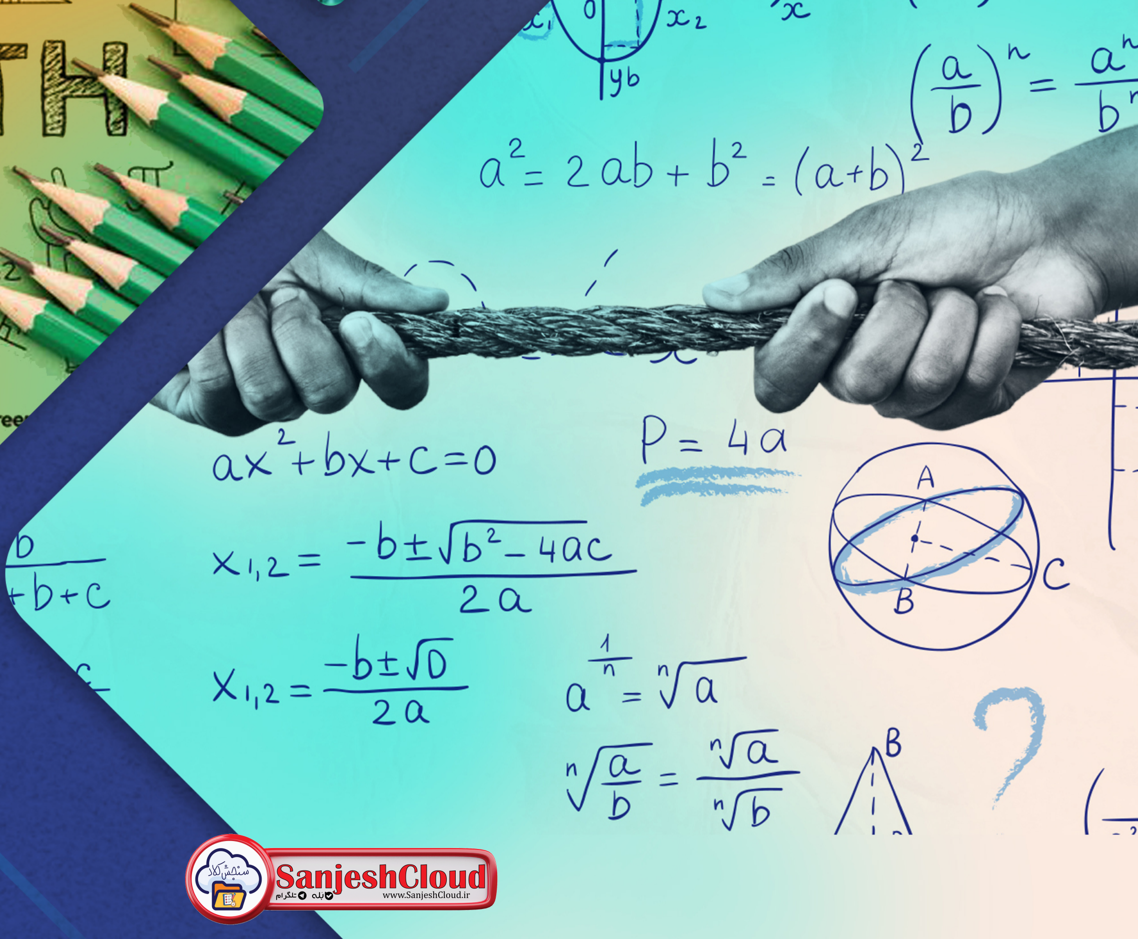
اسفند ۱۴۰۳

دفترچه پاسخ تشریحی

ارزشیابی تشریحی مرحله ۳

ریاضی ۳ (رشته علوم تجربی)





۱۴۰۳_۱۴۰۴

-۱

الف) درست

نکته: اگر تابع f در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در a پیوسته است.

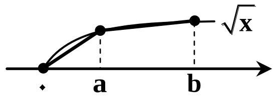
تابع f در $x=۱$ پیوسته نیست، زیرا $\lim\limits_{x\to ۱^+} f(x)=۲$ و $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=۰$. پس این تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر نیست و دامنهٔ مشتق آن به‌صورت $R-\{۱\}$ است.

■ دقت کنید که تابع مشتق f به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ & x>۱ \\ ۲x & x<۱ \end{cases}$$

ب) نادرست

مثلاً تابع $y=\sqrt{x}$ اکیداً صعودی است ولی آهنگ متوسط آن در بازهٔ $[a,b]$ نسبت به $[۰,a]$ در حال کاهش است.



پ) نادرست

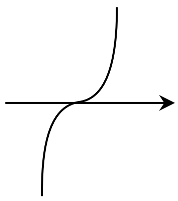
نکته: فرض کنیم c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن‌گاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

بنابراین ممکن است $f'(c)=۰$ باشد ولی نقطهٔ $(c,f(c))$ اکسترمم نسبی تابع نباشد، مثلاً در تابع $y=x^۳$ داریم:



$$y=x^۳ \Rightarrow y'=۳x^۲$$
$$y'=۰ \Rightarrow x=۰$$

نقطهٔ $(۰,۰)$ نقطهٔ بحرانی است ولی اکسترمم تابع نیست، زیرا علامت f' در اطراف $x=۰$ تغییر نمی‌کند.

ت) نادرست

اگر تابع f در بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه تابع f در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

-۲

الف) $\frac{۱}{۲}$

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع $\frac{f}{g}$ $(g(a)\neq ۰)$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{(g(a))^۲}$$

$$f(x)=\frac{۲}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۲}{x^۲} \Rightarrow f''(x)=\frac{۰-۲x(-۲)}{x^۴}=\frac{۴}{x^۳} \Rightarrow f''(۲)=\frac{۴}{۸}=\frac{۱}{۲}$$

ب) ۱۲

نکته: اگر توابع f و g در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع fg نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$
$$(f\cdot g)'(۱)=f'(۱)g(۱)+g'(۱)f(۱)=۵\times۴+(-۲)(۴)=۲۰-۸=۱۲$$

پ) ۱

نکته: نقطهٔ به طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

در اینجا داریم:

$$f'(x)=۳x^۲+۱>۰$$

معادلهٔ $f'(x)=۰$ ریشهٔ حقیقی ندارد و $f'(x)$ در تمام نقاط دامنه به‌جز نقطهٔ $x=۲$ (انتهای دامنه) وجود دارد. پس تابع یک نقطهٔ بحرانی در این بازه دارد.

ت) -3

نکته: فرض کنیم c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن‌گاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

در اینجا داریم:

$$f'(x)=4x^3+4=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow f(-1)=(-1)^4+4(-1)=1-4=-3$$

۳-

الف) گزینهٔ ۲

نکته: شیب خط مماس بر منحنی تابع f در نقطهٔ $(a,f(a))$ برابر است با:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشروط بر اینکه این حد موجود باشد. حد بالا را در صورت وجود، مشتق تابع f در نقطهٔ a نامیده و با $f'(a)$ نمایش می‌دهند.

با توجه به شکل $f(1)=3$ است و خط رسم‌شده در $x=1$ بر تابع f مماس است. پس شیب این خط برابر $f'(1)$ است؛ بنابراین:

$$\begin{cases}(-1,0)\\(1,3)\end{cases} \Rightarrow \text{شیب خط}=\frac{3-0}{1+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow f'(1)=\frac{3}{2}$$

پس حاصل حد خواسته‌شده برابر است با:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{1}{2}\times f'(1)=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

ب) گزینهٔ ۱

نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم: $(fog)'(x)=g'(x)f'(g(x))$

نکته: اگر $n\in N$ و $f(x)=x^n$ آن‌گاه $f'(x)=nx^{n-1}$. نکته: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $x>0$ آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$$f(x)=x^3-x \Rightarrow f'(x)=3x^2-1$$

$$g(x)=\sqrt{x} \Rightarrow g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(fog)'(4)=g'(4)f'(g(4))=\frac{1}{2\sqrt{4}}\times f'(2)=\frac{1}{4}\times 11=\frac{11}{4}$$

پ) گزینهٔ ۳

نکته: فرض کنیم c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد، اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

با توجه به نمودار f' مشاهده می‌شود که $f'(a)=0$ است. پس $x=a$ نقطهٔ بحرانی تابع f است. با تعیین علامت f' در اطراف $x=a$ داریم:

x		a	
f'	$+$	0	$-$
f	$\nearrow$	max نسبی	$\searrow$

$\Rightarrow$ $x=a$ طول ماکزیمم نسبی f است.

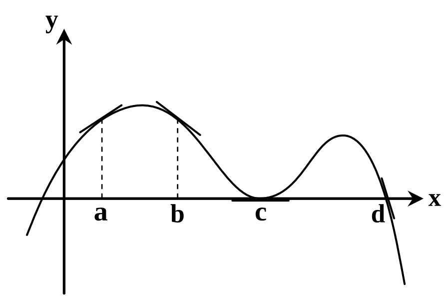
۴-

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار تابع در یک نقطه، برابر مشتق تابع در آن نقطه است. با رسم خط مماس در نقاط داده‌شده داریم:

$$f'(a)>0 \Rightarrow f'(a)=2$$

$$f'(c)=0$$

$$f'(d)<f'(b)<0 \Rightarrow f'(d)=-5\ ,\ f'(b)=-1$$



پس داریم:

$f'(x)$	-5	صفر	2	-1
x	d	c	a	b

۵-

راه‌حل اول:

نکته: مشتق تابع f در نقطهٔ $x=a$ برابر است با:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

تابع f در $x=۲$ پیوسته است و $f(۲)=۰$، اکنون داریم:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\Rightarrow f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x^۲-۲x|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{|x(x-۲)|}{x-۲}$$

اکنون مشتق چپ و راست تابع را محاسبه می‌کنیم:

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x(x-۲)|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-x(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}(-x)=-۲$$

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x(x-۲)|}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}x=۲$$

بنابراین:

$f'_-(۲)\neq f'_+(۲)\Rightarrow$ تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

راه‌حل دوم:

نکته: مشتق تابع f در نقطهٔ a از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{|(۲+h)^۲-۲(۲+h)|-۰}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{|۴+۴h+h^۲-۴-۲h|}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{|h^۲+۲h|}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{|h(h+۲)|}{h}$$

اکنون مشتق چپ و راست را در $x=۲$ به‌دست می‌آوریم:

$$f'_-(۲)=\lim_{h\to ۰^-}\frac{|h(h+۲)|}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-h(h+۲)}{h}=-۲\qquad f'_+(۲)=\lim_{h\to ۰^+}\frac{|h(h+۲)|}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h(h+۲)}{h}=۲$$

بنابراین:

$f'_-(۲)\neq f'_+(۲)\Rightarrow$ تابع f در $x=۲$ مشتق‌پذیر نیست.

۶-

نکته: اگر تابع f در $x=a$ هر یک از شرایط زیر را داشته باشد، در این صورت f در این نقطه مشتق‌پذیر نیست.

۱- f در a پیوسته نباشد.

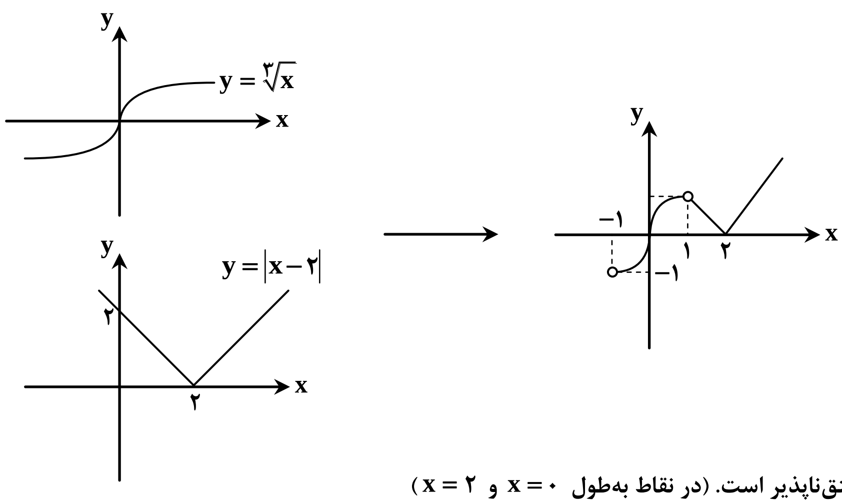
۲- f در a پیوسته باشد و مشتق راست و مشتق چپ در $x=a$:

الف) هر دو موجود (متناهی) ولی نابرابر باشند (نقطهٔ گوشه‌ای).

ب) یکی متناهی و دیگری نامتناهی باشد (نقطهٔ گوشه‌ای).

پ) هر دو نامتناهی باشند.

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



اکنون به سؤالات پاسخ می‌دهیم:

الف) ۲، تابع f روی دامنه‌اش در ۲ نقطه مشتق‌ناپذیر است. (در نقاط به‌طول $x=۰$ و $x=۲$)

ب) $x=۲$، زیرا در این نقطه پیوسته است ولی $f'_-(۲)\neq f'_+(۲)$

پ) خیر، زیرا تابع در $x=۰$ مماس قائم دارد و هر دو مشتق چپ و راست در آن نامتناهی هستند، پس در این نقطه مشتق‌ناپذیر است.

۷-

نکته: اگر $n \in N$ و $f(x) = x^n$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

نکته: اگر $f(x) = \sqrt{ax+b}$ و $ax+b > 0$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{a}{2\sqrt{ax+b}}$.

نکته: اگر $f(x) = \sqrt[3]{x}$ آن‌گاه $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

نکته: اگر توابع f و g مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه توابع $kf(k \in R)$، $f \pm g$، fg و $\frac{f}{g}$ مشتق‌پذیرند و داریم:

الف) $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$

ب) $(kf)'(x) = kf'(x)$

پ) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

ت) $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}$

نکته: اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، در این صورت تابع مرکب fog مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fog)'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

الف) $f'(x) = 5(2x^3+x)^4(6x^2+1)(\sqrt{5x-4}) + (\frac{5}{2\sqrt{5x-4}})(2x^3+x)^5$

ب) $g'(x) = \dfrac{(\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}})(x^4-8x+1) - (4x^3-8)(\sqrt[3]{x^2-1})}{(x^4-8x+1)^2}$

۸-

نکته: اگر توابع f و g در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع fg نیز در $x = a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

نکته: اگر f تابعی برحسب u و u تابعی از x باشد:

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u)$$

نکته: اگر $n \in N$ و $f(x) = x^n$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$.

با استفاده از قوانین مشتق و قاعدهٔ زنجیری داریم:

$$g(x) = x^2 \cdot f(x^3-4x) \Rightarrow g'(x) = (2x)f(x^3-4x) + (3x^2-4)f'(x^3-4x)(x^2)$$

با توجه به اطلاعات مسئله داریم:

$$2f(0) = 3f'(0) = 6 \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 3 \\ f'(0) = 2 \end{cases}$$

اکنون $g'(2)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$g'(2) = 4 \times f(0) + 8 \times f'(0) \times 4 = 4f(0) + 32f'(0) = 4 \times 3 + 32 \times 2 = 12 + 64 = 76$$

۹-

نکته: آهنگ متوسط تغییر یک تابع را در بازه‌ای مانند $[a, a+h]$ به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{آهنگ متوسط تغییر تابع f در بازهٔ } [a,a+h]$$

همچنین آهنگ تغییر لحظه‌ای تابع f را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\text{آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع f در نقطهٔ } x=a = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

الف) با محاسبهٔ مقادیر $f(2)$ و $f(0)$ داریم:

$$f(t) = \sqrt{8t} + t^3 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = \sqrt{16} + 8 = 12 \\ f(0) = \sqrt{0} + 0 = 0 \end{cases}$$

$$\text{آهنگ تغییر متوسط جرم توده در بازهٔ } [0,2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{12-0}{2-0} = 6$$

ب) ابتدا مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f'(t) = \frac{8}{2\sqrt{8t}} + 3t^2$$

آهنگ تغییر لحظه‌ای در $t = \frac{1}{2}$ همان $f'(\frac{1}{2})$ است؛ بنابراین:

$$f'(\frac{1}{2}) = \frac{8}{2\sqrt{4}} + 3(\frac{1}{2})^2 = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$$

-۱۰

نکته: در یک بازه از دامنهٔ تابع f:

الف) اگر مقدار f' موجود و مثبت باشد، آن‌گاه f در آن بازه اکیداً صعودی است.

ب) اگر مقدار f' موجود و منفی باشد، آن‌گاه در آن بازه اکیداً نزولی است.

پ) اگر مقدار f' موجود و برابر صفر باشد، آن‌گاه f در آن بازه تابعی ثابت است.

نکته: فرض کنیم c طول نقطهٔ بحرانی تابع f باشد که f در c پیوسته است و همچنین f در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر علامت f' در $x=c$ از مثبت به منفی تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

ب) اگر علامت f' در $x=c$ از منفی به مثبت تغییر کند، آن‌گاه $x=c$ طول نقطه مینیمم نسبی تابع است.

پ) اگر f' در c تغییر علامت ندهد؛ به‌طوری که f' در یک همسایگی محذوف c همواره مثبت (یا همواره منفی) باشد، آن‌گاه f در c ماکزیمم یا مینیمم نسبی ندارد.

ابتدا مشتق تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=\frac{x+۲}{x^۲+۵} \Rightarrow f'(x)=\frac{(۱)(x^۲+۵)-(۲x)(x+۲)}{(x^۲+۵)^۲}=\frac{x^۲+۵-۲x^۲-۴x}{(x^۲+۵)^۲} \Rightarrow f'(x)\frac{-x^۲-۴x+۵}{(x^۲+۵)^۲}$$

اکنون f' را تعیین علامت می‌کنیم:

$$-x^۲-۴x+۵=۰ \Rightarrow x=۱ \ , \ x=-۵$$

$$x^۲+۵=۰ \Rightarrow \text{ریشهٔ حقیقی ندارد} \Rightarrow x^۲+۵>۰$$

x	$-\infty$	-۵		۱	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	۰	$+$	۰	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
	اکیداً نزولی		اکیداً صعودی		اکیداً نزولی

الف) با توجه به جدول تغییرات، تابع در بازهٔ $[-۵,۱]$ اکیداً صعودی است.

ب) با توجه به جدول تغییرات، تابع در $x=۱$ ماکزیمم نسبی دارد، بنابراین مقدار ماکزیمم نسبی تابع برابر است با:

$$f(۱)=\frac{۱+۲}{۱^۲+۵}=\frac{۱}{۲}$$

-۱۱

نکته: مراحل یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوستهٔ f در بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به شرح زیر است:

۱- مشتق تابع را به‌دست آورده و نقاط بحرانی f را می‌یابیم.

۲- مقدار تابع را در هر یک از نقاط بحرانی و همچنین در نقاط انتهایی بازه محاسبه می‌کنیم.

۳- در مرحلهٔ ۲، بزرگ‌ترین عدد به‌دست آمده، مقدار ماکزیمم مطلق تابع و کوچک‌ترین آن‌ها مینیمم مطلق تابع در بازهٔ $[a,b]$ است.

ابتدا مشتق تابع و سپس نقاط بحرانی آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+k \Rightarrow f'(x)=۳x^۲+۶x$$

$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۳x(x+۲)=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \ \checkmark \\ x=-۲ \ \times \end{cases}$$

$x=-۲$ در بازهٔ $[-۱,۲]$ قرار ندارد، پس نقطهٔ بحرانی تابع در این بازه نیست.

اکنون مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x^۳+۳x^۲+k \Rightarrow \begin{cases} f(-۱)=۲+k \\ f(۲)=۲۰+k : \text{مطلق max} \\ f(۰)=k : \text{مطلق min} \end{cases}$$

واضح است که مقدار $۲۰+k$ ماکزیمم مطلق و مقدار k مینیمم مطلق است. بنابراین با توجه به فرض مسئله داریم:

$$۲۰+k=۵k \Rightarrow ۴k=۲۰ \Rightarrow k=۵$$

-۱۲

نکته: اگر تابع f در نقطهٔ به طول c ماکزیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$.

تابع f چندجمله‌ای است، پس در تمام نقاط مشتق دارد. بنابراین در نقاط اکسترمم نسبی‌اش مشتق آن برابر صفر است.

$$f(x)=ax^۴+bx^۲+۱ \Rightarrow f'(x)=۴ax^۳+۲bx$$

اکنون داریم:

$$\text{اکسترمم نسبی } A(۱,۲) \Rightarrow \begin{cases} f(۱)=۲ \Rightarrow a+b+۱=۲ \Rightarrow a+b=۱ \\ f'(۱)=۰ \Rightarrow ۴a+۲b=۰ \Rightarrow ۲a+b=۰ \end{cases} \Rightarrow a=-۱ \ , \ b=۲$$

۱۳-

نکته: نقطهٔ به طول c از دامنهٔ تابع f را یک نقطهٔ بحرانی برای این تابع می‌نامیم هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد یا $f'(c)$ موجود نباشد.

ابتدا دامنهٔ تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$۸-x^۲\ge ۰ \Rightarrow x^۲\le ۸ \Rightarrow x\in\left[-\sqrt{۸},\sqrt{۸}\right]$$

اکنون مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$f(x)=x\sqrt{۸-x^۲} \Rightarrow f'(x)=\sqrt{۸-x^۲}+\left(\frac{-۲x}{۲\sqrt{۸-x^۲}}\right)(x) \Rightarrow f'(x)=\sqrt{۸-x^۲}+\frac{-x^۲}{\sqrt{۸-x^۲}}=\frac{۸-x^۲-x^۲}{\sqrt{۸-x^۲}}=\frac{۸-۲x^۲}{\sqrt{۸-x^۲}}$$

اکنون معادلهٔ $f'(x)=۰$ را حل می‌کنیم.

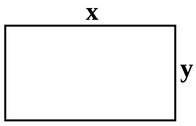
$$f'(x)=۰ \Rightarrow ۸-۲x^۲=۰ \Rightarrow x=\pm ۲$$

هر دو مقدار به‌دست آمده، در دامنهٔ تابع هستند، پس $x=\pm ۲$ طول نقاط بحرانی هستند. از طرفی نقاط $x=\pm\sqrt{۸}$ نیز نقاط بحرانی تابع هستند، زیرا f' در این نقاط وجود ندارد (نقاط ابتدایی و انتهایی دامنه). بنابراین $x=\pm ۲$ و $x=\pm\sqrt{۸}$ طول نقاط بحرانی تابع f هستند.

۱۴-

نکته: در مسائل بهینه‌سازی برای ماکزیمم یا مینیمم کردن یک عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را برحسب یکی از متغیرهای مسئله می نویسیم و سپس با استفاده از مشتق‌گیری و پیداکردن نقاط بحرانی، پاسخ مناسب مسئله را به‌دست می‌آوریم.

محیط مستطیل را به‌صورت تابعی از طول یا عرض آن می‌نویسیم:



طبق فرض: $xy=۳۶ \Rightarrow y=\frac{۳۶}{x}\ ;\ x,y>۰$

محیط مستطیل $=P \Rightarrow P=۲(x+y) \Rightarrow P(x)=۲\left(x+\frac{۳۶}{x}\right)$

اکنون داریم:

$$P'(x)=۲\left(۱-\frac{۳۶}{x^۲}\right)$$

حال معادلهٔ $P'(x)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$P'(x)=۰ \Rightarrow ۱-\frac{۳۶}{x^۲}=۰ \Rightarrow x^۲=۳۶ \Rightarrow x=\pm ۶ \xrightarrow{x>۰} x=۶$$

با رسم جدول تغییرات داریم:

x	۰		۶		$+\infty$
P'		−		+	
P	$+\infty$	↘		↗	$+\infty$

min مطلق

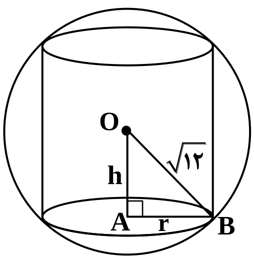
پس کمترین مقدار محیط $P=۲۴$ است.

۱۵-

نکته: در مسائل بهینه‌سازی برای ماکزیمم یا مینیمم کردن یک عبارت، ابتدا تابع آن عبارت را برحسب یکی از متغیرهای مسئله می نویسیم و سپس با استفاده از مشتق‌گیری و پیداکردن نقاط بحرانی، پاسخ مناسب مسئله را به‌دست می‌آوریم.

الف) مرکز کره و استوانه بر هم منطبق است؛ بنابراین OA برابر نصف ارتفاع استوانه یعنی h است.

ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$h^۲+r^۲=۱۲ \Rightarrow r^۲=۱۲-h^۲\ (*)\ ,\ ۰<h<\sqrt{۱۲}$$

اکنون حجم استوانه را به‌عنوان تابعی از ارتفاع آن می‌نویسیم:

$$V_{\text{استوانه}}=\pi r^۲h \xrightarrow{(*)} V=\pi(۱۲-h^۲)(h) \Rightarrow V(h)=\pi(۱۲h-h^۳)$$

ب) بیشترین مقدار V را می‌خواهیم. پس معادلهٔ $V'(h)=۰$ را حل می‌کنیم:

$$V'(h)=\pi(۱۲-۳h^۲)=۰ \Rightarrow ۱۲-۳h^۲=۰ \Rightarrow h^۲=۴ \Rightarrow h=\pm ۲ \xrightarrow{۰<h<\sqrt{۱۲}} h=۲$$

h	۰		۲		۱۲
V'		+	۰	−	
V	۰	↗		↘	۰

max مطلق